ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2004.

Practica 4.

PRACTICA: ESPACIOS L^p.

1. Sean $E \subseteq \mathrm{R^n}$ de medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

   a) Probar que $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$.

   b) Mostrar que $|E| < \infty$, es una condición necesaria para la inclusión.

2. Probar que:

   a) Si $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(E)$, para algún $p : 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_n \overset{m}{\longrightarrow}_{n\to\infty} f$ sobre E.

   b) Si $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(E)$, $g_n \longrightarrow_{n\to\infty} g$ en $L^q(E)$, y $1/p + 1/q = 1$, entonces $f_n g_n \longrightarrow_{n\to\infty} fg$ en $L^1(E)$.

   c) Si $|E| < \infty$ y $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^\infty(E)$, entonces $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(E)$, para todo $p \geq 1$.

3. Dadas las funciones $f_n : [0,1] \to \mathrm{R}$,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

   probar que $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ a.e. y $f_n \overset{m}{\longrightarrow}_{n\to\infty} 0$, pero f_n no converge en $L^p([0,1])$ para $p : 1 \leq p \leq \infty$.

4. Sean $E \subseteq \mathrm{R^n}$ medible, $(f_n)_{n\geq 1}$ y f en $L^p(E)$, para $p : 1 \leq p < \infty$. Probar:

   a) $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_{L^p(E)} \longrightarrow_{n\to\infty} \|f\|_{L^p(E)}$.

   b) Si $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ a.e. sobre E, entonces:

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \longrightarrow_{n\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

   (Sug.: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión: $g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p$.)

5. Si $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en L^p, $1 \leq p < \infty$, $g_n \longrightarrow_{n\to\infty} g$ puntualmente y $\|g_n\|_\infty \leq M$, para todo $n \in \mathrm{N}$, probar que $f_n g_n \longrightarrow_{n\to\infty} fg$ en L^p.

6. Sea $E = [0, 1/2]$. Probar:

a) $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(E)$, $(1 \leq p < \infty)$, pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para todo $p : 1 \leq p < \infty$, pero $g \notin L^\infty(E)$.

7. Sea $E = [0, \infty)$. Probar que $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$ pero $f \notin L^p(E)$ para ningún $p : 1 \leq p < \infty$, y $p \neq 2$.

8. *a*) Dadas funciones $f \in L^p(\mathrm{R^n})$ y $g \in L^{p'}(\mathrm{R^n})$ donde $1/p + 1/p' = 1$, probar que la convolución $f * g(x)$ existe y es finita para todo $x \in \mathrm{R^n}$. Además define una función acotada y uniformemente continua.

   b) Dado $E \subseteq \mathrm{R^n}$ tal que $0 < |E| < \infty$, probar que:

$$E \; - \; E = \{x - y : x, y \in E\}$$

   contiene un conjunto abierto no vacío. (Sug.: considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.)